基本アーベル体の狭義不分岐中心拡大について(代数的整数論)

堀江, 充子

数理解析研究所講究録
721巻 1990年 53-61

基本アーベル体の狭義不分岐中心拡大について

九大理　　堀江　充子　(Mitsuko Horie)

有理数体，有理整数環をそれぞれ $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ で表わす．K/F を有限次代数体の Galois 拡大とする．K の拡大体 L について，L/F が Galois 拡大であって，$\mathrm{Gal}(L/K)$ が $\mathrm{Gal}(L/F)$ の中心に含まれるとき，L は K/Fの中心拡大であるという．特に，F として有理数体 $\mathbb{Q}$ を取ったときに K 上狭義不分岐な $K/\mathbb{Q}$ の最大中心拡大をK_C で表わし，さらに，K の狭義の genus field を $K^{\#}$ で表わす；$K^{\#}$ は K_C に含まれる $\mathbb{Q}$ 上の最大 abel 拡大体である．

以後 ℓ を固定された素数，n を 2 以上の固定された自然数とし，K は $\mathbb{Q}$ 上の ℓ^n 次基本 abel 拡大体，すなわち，$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})\cong(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^n$ となる $\mathbb{Q}$ 上の Galois 拡大とする．また，ℓ 個の元からなる有限体を $\mathbb{F}$ で表わす．このとき，$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ は自然に $\mathbb{F}$ 上の線形空間とみなせ，しかも，$\mathrm{Gal}(K_C/K^{\#})$ もまた $\mathbb{F}$ 上の線形空間とみなせることがわかる ([1]参照)．一般に，$\mathbb{F}$ 上の線形空間 V に対し，その双対空間を V^* と書く．この小文では，K_C と $K^{\#}$ の中間体 M と K の部分体 k との関係を，$\mathrm{Gal}(M/K^{\#})^*$ と $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})^*$ との関係を通して記述することを試みる．

以下，記号を簡単にするために，

$$G=\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}),\quad \mathfrak{X}_M=\mathrm{Gal}(M/K^{\#})^*,\quad X_k=\mathrm{Gal}(k/\mathbb{Q})^*=G^*$$

とおく．

1．　K の狭義の絶対類体を K_H で表わし，$\mathbb{G}=\mathrm{Gal}(K_H/\mathbb{Q})$，$\mathbb{H}=\mathrm{Gal}(K_H/K)$ とおくと，

$$\mathrm{Gal}(K_H/K_C) = [\mathbb{G},\mathbb{H}] \lhd \mathrm{Gal}(K_H/K^{\#})=[\mathbb{G},\mathbb{G}],$$

$$\mathrm{Gal}(K_C/K^{\#}) \cong [\mathbb{G},\mathbb{G}]/[\mathbb{G},\mathbb{H}],$$

となるが，$\mathbb{G}/\mathbb{H}$ が abel 群であることから，対応

$$(\sigma\mathbb{H},\tau\mathbb{H}) \longmapsto \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}[\mathbb{G},\mathbb{H}],\qquad \sigma,\ \tau\in\mathbb{G}$$

によって，上への歪対称双線形写像

$$\mathbb{G}/\mathbb{H}\times\mathbb{G}/\mathbb{H} \longrightarrow [\mathbb{G},\mathbb{G}]/[\mathbb{G},\mathbb{H}]$$

が定義される．これから自然に導かれる G の２乗外積 $G\wedge G$ から $\mathrm{Gal}(K_C/K^{\#})$ の上への線形写像を ρ とおくと，ρ は

$$\rho((\sigma|_K)\wedge(\tau|_K)) = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}|_{K_C},\qquad \sigma,\ \tau\in\mathbb{G}$$

を満たす．そこで，$\rho^*:\mathfrak{X}_{K_C}\longrightarrow(G\wedge G)^*$ を，

$$\rho^*(\gamma) = \gamma\circ\rho,\qquad \gamma\in\mathfrak{X}_{K_C}$$

によって定めると，ρ^* は単射線形写像となる． また，素数 p の $K/\mathbb{Q}$ での分解群を $D(p)$ とおくと， これは $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ の F-部分空間だから， $D(p)\wedge D(p)$ は自然に，$G\wedge G$ の F-部分空間となる．そこで，$D(p)\wedge D(p)$ の $(G\wedge G)^*$ における annihilator を $(D(p)\wedge D(p))^{\perp}$ で表わす．さらに，ι を $X_K\wedge X_K$ から $(G\wedge G)^*$ への線形同型で，$\chi,\ \psi\in X_K$ と $g,\ h\in G$ に対して，

$$(\iota(\chi\wedge\psi))(g\wedge h) = \chi(g)\psi(h) - \chi(h)\psi(g)$$

を満たすものとする.

定理1.　以上の記号のもとで，次の事実が成り立つ.

(i)　P を $D(p)$ の位数が ℓ^2 以上の素数 p 全体のなす有限集合とすると，

$$\mathrm{Im}\,\rho^* = \bigcap_{p\in P}(D(p)\wedge D(p))^{\perp}.$$

(ii) K の任意の部分体 k に対して，M を K_C に含まれる k の最大中心拡大とすると，M は $K^{\#}$ と k_C の合成体であり，

$$\rho^*(\mathfrak{X}_M) = \mathrm{Im}\,\rho^* \cap \iota(X_k\wedge X_k).$$

従って，特に k が K の任意の bicyclic 部分体のときには，k_C が $\mathbb{Q}$ 上非 abel 拡大であることと $\iota(X_k\wedge X_k)$ が $\mathrm{Im}\,\rho^*$ に入ることが同値である.

定理1，(i)の証明には，次の Hasse norm principle に関連して[7]の中で Tate によって示された事実と，[2]，[3]の Furuta の genus number と central class number に関する公式を，狭義の場合に読みかえて得られる公式が本質的である.

Tate の定理.　L/F を有限次代数体の Galois 拡大とする. F の各素点 v に対し，D_v を v の上にある L の素点に対する分解群の1つ，Cor_v を correstriction map $H_2(D_v,\mathbb{Z})\longrightarrow H_2(\mathrm{Gal}(L/F),\mathbb{Z})$ とし，f を $f(\sum_v z_v)=\sum_v \mathrm{Cor}_v z_v$, $z_v\in H_2(D_v,\mathbb{Z})$ によって定められる準同型 $\bigoplus_v H_2(D_v,\mathbb{Z})\longrightarrow H_2(\mathrm{Gal}(L/F),\mathbb{Z})$ とする. このとき，

$$\mathrm{Coker}\ f \cong (F^{\times} \cap N_{L/F} J_L)/N_{L/F} L^{\times}$$

が成り立つ．但し，ここで J_L は L の idele 群とする．

古田の公式（狭義の場合）． L/F を有限次代数体の Galois 拡大とする．$L_C(F)$ を L 上狭義不分岐な L/F の最大中心拡大とする．また $L^{\#}(F)$ を $L_C(F)$ に含まれる F 上の最大 abel 拡大とすると，次が成り立つ．

$$[L_C(F):L^{\#}(F)] = (F^{\times} \cap N_{L/F} J_L : N_{L/F} L^{\times})/(E \cap N_{L/F} U^{+} : E \cap N_{L/F} U^{+} \cap N_{L/F} L^{\times}),$$

ここで E は F の単数群，U^{+} は J_L の unit idele のうち，すべての アルキメデス的素点での成分が正であるもの全体のなす群を表す．

更に，一般に有限 abel 群 A に対して，$H_2(A,\mathbb{Z})$ は $A \wedge A$ と同型になることを，補足的に注意しておく（[6]参照）．

また，(ii)は，(i)と基本的な群論的考察により示される．

注意． 定理１は，G が基本 abel 群の直和の場合に一般化できる．なお，$D(p)$ は素数 p の abel 拡大 $K/\mathbb{Q}$ に関する分解群であり，$X_K \wedge X_K$ は “Dirichlet 指標の群” の外積であるから，定理１ (i)，(ii)の２つの式の右辺は，ともに K に対応する Dirichlet 指標の群が与えられれば，実際に計算することができる．すなわち，定理１は $\mathfrak{X}_{K_C}$ が ρ^{*} を通して有理的に捕えられることを主張している．

定理１から直ちに次の系を得る.

系１.　$k^{(1)},\cdots,k^{(s)}$ を K の bicyclic 部分体とし，各 $i\in\{1,\cdots,s\}$ に対し，$\{\chi_i,\psi_i\}$ を $X_{k^{(i)}}$ の F 上の基底とする．このとき，すべての $i\in\{1,\cdots,s\}$ について $\iota(\chi_i\wedge\psi_i)$ が $\mathrm{Im}\,\rho^*$ に入っていて，$\{\chi_i\wedge\psi_i\,|\,i=1,\cdots,s\}$ が F 上１次独立ならば，$\prod_{i=1}^{j-1}K^{\#}k^{(i)}_C$ と $K^{\#}k^{(j)}_C$ は，すべての $j\in\{1,\cdots,s\}$ に対し，$K^{\#}$ 上線形無関連である.

さて，狭義の genus field に関しては，k として K のすべての (bi)cyclic 部分体を動かすとき，$K^{\#}$ は $k^{\#}$ 達の合成体となるが，K_C についても同様のことが成り立つか，すなわち，$K_C=\prod k_C$（ここで，k は K のすべての bicyclic 部分体を動くものとする）となるかという疑問が生じる．定理１を用いれば，$K_C=\prod k_C$ となる為の条件を次の様に書き下すことができる.

系２.　K_C が K の bicyclic 部分体 k 達すべての最大狭義不分岐中心拡大 k_C 達の合成体であるためには，$\bigcap_{p\in P}(D(p)\wedge D(p))^{\perp}$ が $\iota(\chi\wedge\psi)$, $\chi,\psi\in X_K$ なる形の $(G\wedge G)^*$ の元達で生成されることが必要十分である.

２.　次に，K_C が bicyclic 部分体 k の最大狭義不分岐中心拡大 k_C 達の合成体になる例，及び，その反例について詳しく述べることにする．まず，$K_C=\prod k_C$（ここで，k は K のすべての bicyclic 部分体を動くものとする）となる場合は，つぎの十分条件によって，実例が無数に存在することがわかる.

定理２． p が P の素数を動くときの $D(p)\wedge D(p)$ 達で張られる F 上の線形空間の次元が 3 以下，または，$n(n-1)/2$ に等しいならば，K_C は k が K の bicyclic 部分体すべてを動いたときの k_C 達の合成体となる．

定理２は，$D(p)\wedge D(p)$ の F 上の次元が 1 または 3 であることなどに注意して，系２をもとに基本的な計算をすることによって示される．

定理２の特別の場合として，次が成り立つ．

系３． $n=3$，すなわち K が３つの $\mathbb{Q}$ 上独立な ℓ 次巡回体の合成体であるときには，常に K_C は k が K の bicyclic 部分体を動いたときの k_C 達の合成体となる．

一般には，K_C は k_C 達（k は K の bicyclic 部分体）の合成体にはならないことも，系２によって知ることができる．最後に，この様な例を挙げることにする．

<u>例１</u>．ℓ を奇素数とし，ℓ を法として 1 に合同な互いに異なる素数 p_1，p_2，p_3，p_4 が次の条件を満たすとする．$i\in\{1, 2, 3, 4\}$ に対して K_i を導手 p_i の ℓ 次巡回体とするとき，p_1 は K_2，K_4 で分解，K_3 で不分解，p_2 は K_3，K_4 で分解，K_1 で不分解，p_3 は K_1 で分解，K_2，K_4 で不分解，p_4 は K_2 で分解，K_1，K_3 で不分解．この様な４つの素数の組が無数に存在することは，Cebotarev の密度定理によって保証される．ここで，K を４つの巡回体 K_1，K_2，K_3，K_4 の合成体とし，$\mathrm{Gal}(K/\prod_{j\neq i} K_j)$ の１

つの生成元 g_i を固定しておく．　また，$\{\chi_i\}_{1\leq i\leq 4}$ を $\{g_i\}_{1\leq i\leq 4}$ の双対底，すなわち，$\chi_i(g_j)=\delta_{ij}$ を満たすものとすると，$P=\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ であり，

$$D(p_1)=\langle g_1, g_3\rangle,\ D(p_2)=\langle g_1, g_2\rangle,\ D(p_3)=\langle g_3, g_2g_4{}^a\rangle,\ D(p_4)=\langle g_4, g_1g_3{}^b\rangle.$$

ここで a，b は，ある適当な $F^\times$ の元である．よって，定理1により，

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,\rho^* &= \langle g_1\wedge g_2,\ g_1\wedge g_3,\ g_2\wedge g_3-a\,g_3\wedge g_4,\ g_1\wedge g_4+b\,g_3\wedge g_4\rangle^{\perp}\\ &= \langle \iota(\chi_2\wedge\chi_4),\ \iota(a\,\chi_2\wedge\chi_3+\chi_3\wedge\chi_4-b\,\chi_1\wedge\chi_4)\rangle\end{aligned}$$

となる．このことから，$[K_C:\prod k_C]=[\prod k_C:K^{\#}]=\ell$ であって，$\prod k_C=K^{\#}(K_2K_4)_C$ であることがわかる．

例2．　$\ell=2$ とし，p_1，p_2，p_3，p_4，p_5 を 4 を法として 1 と合同な相異なる素数とし，また，q_1，q_2，q_3 は 4 を法として -1 と合同な相異なる素数で，次の条件を満たすものとする．

$$\left(\frac{p_3}{p_1}\right)=-1,\ \left(\frac{p_4}{p_1}\right)=\left(\frac{p_5}{p_1}\right)=\left(\frac{-q_1}{p_1}\right)=\left(\frac{-q_2}{p_1}\right)=\left(\frac{-q_3}{p_1}\right)=1,$$

$$\left(\frac{p_4}{p_2}\right)=1,\ \left(\frac{p_3}{p_2}\right)=\left(\frac{p_5}{p_2}\right)=\left(\frac{-q_1}{p_2}\right)=\left(\frac{-q_2}{p_2}\right)=\left(\frac{-q_3}{p_2}\right)=-1\ ,$$

$$\left(\frac{p_4}{p_3}\right)=\left(\frac{p_5}{p_3}\right)=\left(\frac{-q_2}{p_3}\right)=1,\ \left(\frac{-q_3}{p_3}\right)=-1\ ,$$

$$\left(\frac{p_5}{p_4}\right)=1,\ \left(\frac{-q_1}{p_4}\right)=\left(\frac{-q_3}{p_4}\right)=-1\ ,\ \left(\frac{-q_1}{p_5}\right)=1,\ \left(\frac{-q_2}{p_5}\right)=-1\ ,$$

$$\left(\frac{-q_3}{q_1}\right)=1,\ \left(\frac{-q_2}{q_1}\right)=\left(\frac{-q_3}{q_2}\right)=-1.$$

このような素数の組 p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, q_1, q_2, q_3 が無数に存在することは，Dirichlet の算術級数中の素数定理から明らかである．そこで，$d_1=p_1p_2$，$d_2=p_3(-q_1)$，$d_3=p_4(-q_2)$，$d_4=p_5(-q_3)$ とおき，$K=\mathbb{Q}(\sqrt{d_1},\sqrt{d_2},\sqrt{d_3},\sqrt{d_4})$ とする．各 $i\in\{1,2,3,4\}$ に対し，$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}(\sqrt{d_j}\,|\,j\neq i))$ の自明でない元を g_i とおくと，（平方剰余の相互法則によって）$D(p_1)=D(q_1)=\langle g_1,g_2\rangle$，$D(p_2)=D(q_2)=\langle g_1,g_3\rangle$，$D(p_3)=\langle g_2,g_4\rangle$，$D(p_5)=D(q_3)=\langle g_1g_3,g_4\rangle$，$D(p_4)=\langle g_2g_4,g_3\rangle$ となり，従って，$P=\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, q_1, q_2, q_3\}$ となる．例１と同じ様に，$\{\chi_i\}_{1\leq i\leq 4}$ を $\{g_i\}_{1\leq i\leq 4}$ の双対底とすると，

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,\rho^* &= \langle g_1\wedge g_2,\ g_1\wedge g_3,\ g_2\wedge g_4,\ g_1g_3\wedge g_4,\ g_2g_4\wedge g_3\rangle^{\perp}\\ &= \langle \iota(\chi_1\wedge\chi_4+\chi_2\wedge\chi_3+\chi_3\wedge\chi_4)\rangle\end{aligned}$$

となり，これより $[K_C:\prod k_C]=2$，$\prod k_C=K^{\#}$ であることがわかる．

注意．$\mathbb{Q}$ 上 bicyclic な体 k に対して $\mathrm{Gal}(k_C/\mathbb{Q})$ の群構造はわかっている（[4]参照）．従って，特に，基本 abel 体 K に対して，$K_C=\prod k_C$（k は K のすべての bicyclic 部分体を動く）が成り立つときには，$\mathrm{Gal}(K_C/\mathbb{Q})$ の群構造がわかることになる．さらに，$\ell=2$ のときには K_C の $K^{\#}$ 上の生成元を，簡単な２次の連立不定方程式を解くことによって，与えることができる（なお，この小文の詳細は，[5]にあります）．

文献

[1] A. Fröhlich: "Central extensions, Galois groups, and ideal class groups of

number fields," Contemporary of Math. 24, Amer. Math. Soc., Providence-Rhode Island, 1983.

[2] Y. Furuta: The genus field and genus number in algebraic number fields, Nagoya Math. J. **29** (1967), 281-285.

[3] Y. Furuta: Über die Zentrale Klassenzahl eines relativ galoisschen Zahlkörpers, J. Number Theory **3** (1971), 318-322.

[4] M. Horie: A note on central class fields, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **57** (1987), 119-125.

[5] M. Horie: On central extensions of elementary abelian fields, preprint.

[6] D. J. S. Robinson: "A course in the theory of groups," Graduate texts in Math. 80, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982.

[7] J. Tate: Global class field theory, in "Algebraic number theory (J. W. Cassels and A. Fröhlich, Ed.)," Academic Press, London and New York, 1967.